

Wielandt 定理与非幂零极大子群指数皆为素数的有限群

田云凤, 史江涛, 刘文静

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 为了进一步研究每个非幂零极大子群的指数皆为素数的有限群的可解性, 使用反证法和极小阶反例的方法, 并结合应用 Wielandt 给出的一个关于具有幂零 Hall - 子群 (不是 Sylow - 子群) 的有限群 G 的结构刻画的定理, 得到了一个较为初等的关于每个非幂零极大子群的指数皆为素数的有限群 G 的可解性的证明。该证明没有应用 Glauberman-Thompson p - 幂零准则和 Rose 的关于具有幂零极大子群的非交换单群的分类和关于具有幂零极大子群且中心等于 1 的非可解群的刻画, 这改进了之前在相关的研究文献中关于这个结论的证明。

关键词: Wielandt 定理; 非幂零极大子群; 指数; 素数; 可解

DOI: 10.15938/j.jhust.2023.03.017

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)03-0140-04

Wielandt's Theorem and Finite Groups with Every Non-nilpotent Maximal Subgroup with Prime Index

TIAN Yunfeng, SHI Jiangtao, LIU Wenjing

(School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: In order to give a further study of the solvability of a finite group in which every non-nilpotent maximal subgroup has prime index, the methods of the proof by contradiction and the counterexample of the smallest order and a theorem of Wielandt on the characterization of the structure of a finite group G with a nilpotent Hall-subgroup which is not a Sylow subgroup are applied to obtain a more elementary proof of the solvability of a finite group in which every non-nilpotent maximal subgroup has prime index. The proof does not apply the Glauberman-Thompson p -nilpotent criterion and Rose's two results on a classification of non-abelian simple groups with nilpotent maximal subgroup and a characterization of non-solvable group with nilpotent maximal subgroup and trivial center respectively, which improves the proof of the result in the relevant research references.

Keywords: Wielandt's theorem; non-nilpotent maximal subgroup; index; prime; solvable

0 引言

本文讨论的群都是有限群, 所用符号都是标准的, 见文[1]。对于群的一般极大子群, Guralnick 在文[2]中证明了如果群 G 的每一极大子群的指数皆为素数幂, 则 $G/O_{\infty}G \cong 1$ 或 $PSL(2, 7)$, 其中 $O_{\infty}G$

为 G 的最大的正规可解子群。Huppert 定理 (见文[1]第 IX 章定理 1.12) 证明了群 G 是超可解群当且仅当 G 的所有极大子群的指数是素数。对于具有幂零极大子群的群, Thompson 定理 (见文[3]定理 10.4.2) 证明了如果群 G 具有一个奇数阶幂零极大子群 M , 则 G 可解。王宏在定理 3 中证明了对于具有幂零极大子群和交换 Sylow 2 - 子群的群 G , 如果

收稿日期: 2022-03-01

基金项目: 国家自然科学基金(11761079); 山东省自然科学基金(ZR2017MA022; ZR2020MA044); 烟台大学研究生科研创新基金(GGI-FYTU2312)。

作者简介: 田云凤(1998—), 女, 硕士研究生;

刘文静(1997—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 史江涛(1980—), 男, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, E-mail: jiangtaoshi@126.com。

G 的奇素数阶子群都是半正规的, 则 G 有亏零 2 - 块的充分必要条件是 $O_2(G) = 1$ 。

考虑群的非幂零极大子群, 文[5]证明了如果群 G 的每一非幂零极大子群的指数为素数幂, 则 $G/S(G) \cong 1$ 或 $PSL(2, 7)$, 其中 $S(G)$ 为 G 的最大的可解正规子群。文[6]定理 1.1 得到了对于非可解群 G 的阶的任意素因子 p , G 中均存在阶能被 p 整除的非幂零极大子群。文[7]定理 1.1 和定理 1.3 分别刻画了非幂零极大子群共轭类类数等于 2 的群的可解性和非幂零极大子群同阶类类数等于 2 的非可解群的结构。文[8]定理 2 给出了非可解群所含非幂零极大子群个数的一个下界。

对于每个非幂零极大子群皆正规的群, 文[9]引理 4、文[10]定理 1.3 和定理 3.5、文[11]定理 1 和文[12]定理 1.1 分别从不同的角度证明了该类群是可解群。特别地, 文[13]定理 5 在非幂零极大子群皆正规的群是可解群的基础上进一步证明了该类群具有 Sylow 塔, 而作为文[13]定理 5 的改进, 文[14]定理 1 的证明不需要用到非幂零极大子群皆正规的群的可解性, 直接证明了该类群具有 Sylow 塔。

1 主要结果与预备引理

进一步考虑每个非幂零极大子群指数皆为素数的群, 文[10]定理 1.2 (1)、文[15]定理 1.3 和文[16]定理 7 分别从不同的角度证明了下述结论成立:

定理 1^[10, 15, 16] 如果群 G 的每个非幂零极大子群的指数皆为素数, 则 G 可解。

文[17]在定理 1 中的群是可解群的基础上, 进一步证明了该类群具有 Sylow 塔。文[18]在定理 1 中的群是可解群的基础上刻画了该类群的子群结构。

需要指出的是, 在文[10]定理 1.2 (1) 的证明中用到了下面的 Glauberman-Thompson p - 幂零准则:

定理 2^[1] 设 G 为群, p 为奇素数, $P \in \text{Syl}_p(G)$ 。若 $N_G(Z(J(P)))$ 有正规 p - 补, 则 G 也有正规 p - 补, 其中 $J(P)$ 是 P 的 Thompson 子群。

在文[15]定理 1.3 的证明中用到的关键定理是 Rose 在文[19]中给出的关于具有幂零极大子群的非交换单群的分类刻画和关于具有幂零极大子群且中心等于 1 的非可解群的刻画:

定理 3^[19] 具有幂零极大子群的非交换单群必为某个射影特殊线性群 $PSL(2, p)$, 其中 p 为大于等于 17 的费马素数或梅森素数。

定理 4^[19] 设 G 是一个具有幂零极大子群 M 的非可解群, 若 $Z(G) = 1$, 则 M 是 G 的 Sylow 2 - 子群。

在文[16]定理 7 的证明中用到的关键定理为上述定理 4。

在文[20]第四章定理 7.3 中, Wielandt 定理给出了具有幂零 Hall - 子群的群 G 的结构刻画:

定理 5^[20] 设 H 是群 G 的幂零 Hall - 子群但不是 Sylow 子群。假若对于 $|H|$ 的任一素因子 p , H 的 Sylow p - 子群 P 都满足 $N_G(P) = H$, 那么存在 G 的正规子群 K 使得 $G = KH$ 且 $K \cap H = 1$ 。

在本文中, 我们将不应用上述定理 2、定理 3 和定理 4, 使用反证法和极小阶反例的方法, 并结合应用上述定理 5 给出关于上述定理 1 的一个较为初等的新证明, 我们的证明改进了文[10]定理 1.2 (1)、文[15]定理 1.3 和文[16]定理 7 中的证明。

引理 1^[3] 假设群 G 的每个极大子群皆幂零但 G 自身非幂零, 则 G 可解。

引理 2^[1] 令 p 是群 G 的阶的最大素因子, $P \in \text{Syl}_p(G)$, 那么或者 P 正规于 G , 或者包含 $N_G(P)$ 的极大子群有合数指数。

引理 3^[3] 如果群 G 具有一个奇数阶的幂零极大子群, 则 G 可解。

引理 4^[21] 设 G 为非交换单群, $\pi_i(G)$ 是 G 的所有极大子群指数的集合。如果 $\pi_i(G)$ 中存在一个素数 p , 则 p 必为 $|G|$ 的最大素因子。

2 定理 1 的新证明

证明: 设 G 为极小阶反例。

如果群 G 的每个极大子群皆幂零, 因为 G 非幂零, 则 G 是内幂零群, 由引理 1 知 G 可解, 矛盾。如果 G 的每个极大子群皆非幂零, 由题设知 G 的每个极大子群的指数皆为素数, 则 G 为超可解群, 亦有 G 可解, 矛盾。故 G 既有幂零极大子群亦有非幂零极大子群。

设 p 为 $|G|$ 的最大素因子, 因为 G 非可解, 则 p 必为奇素数。设 $P \in \text{Syl}_p(G)$ 。若 P 正规于 G , 显然商群 G/P 满足题设条件且 $|G/P| < |G|$, 由 G 为极小阶反例知 G/P 可解, 从而 G 可解, 矛盾。故 P 不正规于 G 。特别地, G 不含可解的非平凡正规子群。

由引理2知 G 的包含 $N_c(P)$ 的极大子群具有合数指数。由题设, $N_c(P)$ 只能包含在 G 的某个幂零极大子群内。不妨设 M 为 G 的幂零极大子群使得 $N_c(P) \leq M$ 。

先证 M 是 G 的Hall-子群。

反证,假设 M 不是 G 的Hall-子群,则 $|M|$ 存在一个素因子 q 使得 M 的Sylow q -子群不是 G 的Sylow q -子群。不妨设 $Q_1 \in \text{Syl}_q(M)$ 和 $Q \in \text{Syl}_q(G)$ 使得 $Q_1 < Q$,则存在 $Q_2 \leq Q$ 使得 $Q_1 < Q_2$ 且 $|Q_2:Q_1| = q$,于是 Q_1 正规于 Q_2 。又因为 M 幂零,知 $N_c(Q_1) \geq \langle M, Q_2 \rangle > M$ 。由 M 为 G 的极大子群得 $N_c(Q_1) = G$,说明 Q_1 正规于 G ,与 G 不含可解的非平凡正规子群矛盾。故 M 是 G 的Hall-子群。

下证 M 不是 G 的Sylow子群。

反证。如果 M 是 G 的Sylow子群,因为 $M \geq N_c(P)$,则有 $M = N_c(P) = P$ 。注意 p 为奇素数,于是 M 是 G 的奇阶幂零极大子群,由引理3知 G 可解,矛盾。故 M 不是 G 的Sylow子群。

设 w 为 $|M|$ 的任一素因子,令 $W \in \text{Syl}_w(M)$,因为 M 幂零,则 $M \leq N_c(W)$ 。又 M 为 G 的极大子群且 G 不含可解的非平凡正规子群,所以必有 $N_c(W) = M$ 。

由定理5知,存在 G 的正规子群 H ,使得 $G = HM$ 且 $H \cap M = 1$,即 G 为 H 和 M 的半直积。因为 M 是 G 的极大子群,知 H 必为 G 的极小正规子群。又 H 非可解,于是 H 为若干同构的非交换单群的直积。不妨设 $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m$,其中 $\forall 1 \leq i \leq j \leq m$ 都有 $H_i \cong H_j$ 。

设 r 是 $|H|$ 的最大素因子,则 r 是奇素数。注意 r 亦为每一个 $|H_i|$ 的最大素因子。因为 M 是 G 的Hall-子群,故 r 不整除 $|M|$ 。令 $R \in \text{Syl}_r(H)$,则 R 亦为 G 的Sylow r -子群。显然 R 不正规于 G ,于是 $N_c(R) < G$ 。设 K 为 G 的极大子群使得 $N_c(R) \leq K$ 。由Fratini论断,知 $G = HN_c(R) = HK$ 。

下面对 K 分幂零和非幂零两种情形进行讨论:

如果 K 幂零,因为 $G = HM = HK$,则 $|HM| = |HK|$,即 $|H||M| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ 。于是 $|M| = \frac{|K|}{|H \cap K|}$ 整除 $|K|$ 。因为 K 为 G 的幂零极大子群,类似上面关于 M 的讨论,知 K 为 G 的Hall-子群但不是 G 的Sylow子群。设 s 是 $|M|$ 的任一素因子,则 $s \nmid |K|$ 。令 $S_1 \in \text{Syl}_s(M)$ 和 $S_2 \in \text{Syl}_s(K)$,则 S_1 和 S_2 都是 G 的Sylows-子群。因此,存在 $g \in G$,使得 $S_1 = S_2^g$ 。因为 $S_2 \leq K$,所以 $S_2^g \leq K^g$ 。由 K 幂零知 K^g 亦幂零。注

意 $R^g \leq K^g$ 且 $r \neq s$,则 S_2^g 和 R^g 可交换,即 S_1 和 R^g 可交换。于是 $R^g \leq N_c(S_1)$ 。又 $M \leq N_c(S_1)$,因此 $N_c(S_1) \geq \langle M, R^g \rangle$ 。又 r 不整除 $|M|$,所以 $\langle M, R^g \rangle > M$,得 $N_c(S_1) \geq \langle M, R^g \rangle > M$,从而有 S_1 正规于 G ,矛盾。

如果 K 非幂零,由题设知 $|G:K|$ 为素数,设该素数为 t 。因为 $K \geq N_c(R)$,所以 $t \neq r$ 。由于 $G = HK$,知 $|G:K| = |HK:K| = |H:H \cap K| = t \neq r$ 。则 $H \cap K$ 是 H 的极大子群。注意 $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m$,于是必然存在某个 H_i ,使得 H_i 不包含于 $H \cap K$ 。不妨设 H_1 不包含于 $H \cap K$,因为 H_1 正规于 H 且 $H \cap K$ 是 H 的极大子群,则 $H = H_1(H \cap K)$ 。于是 $|H:H \cap K| = |H_1(H \cap K):H \cap K| = |H_1:H_1 \cap (H \cap K)| = |H_1:(H_1 \cap K)| = t \neq r$,知非交换单群 H_1 有一个指数为素数 t 的极大子群 $H_1 \cap K$ 。由引理4知, t 必为 $|H_1|$ 的最大素因子。进而 t 必为 $|H|$ 的最大素因子,这与 r 是 $|H|$ 的最大素因子且 $t \neq r$ 矛盾。

综上所述,说明极小阶反例不存在,故 G 是可解的。证毕。

参考文献:

- [1] 徐明曜,黄建华,李慧陵,李世荣. 有限群导引(下册)[M]. 北京:科学出版社,1999.
- [2] GURALNICK R. M. . Subgroups of Prime Power Index in a Simple Group[J]. Journal of Algebra, 1983, 81: 304.
- [3] ROBINSON D. J. S. . A Course in the Theory of Groups[M]. New York: Springer, 2003.
- [4] 王宏,钱方生. 某些子群是半正规的有限群亏零块的存在性[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2020, 25(4): 167.
- WANG Hong, QIAN Fangsheng. The Existence of p -blocks of Defect 0 in a Finite Groups with Some Subgroups Being Seminormal[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2020, 25(4): 167.
- [5] 郭秀云. 非幂零极大子群指数为素数幂的有限群[J]. 数学年刊:A辑,1994, 15(6): 721.
- GUO Xiuyun. Finite Groups in Which Every Non-nilpotent Maximal Subgroup Has Prime Power Index[J]. Chinese Annals of Mathematics. Series A, 1994, 15(6): 721.
- [6] SHI Jiangtao, LI Na, SHEN Rulin, Finite Groups in Which Every Maximal Subgroup is Nilpotent or Normal or Has p' -order[J]. International Journal of Algebra and Computation, 2023, 33(5): 1055.
- [7] 史江涛,张翠,申振才. 非幂零极大子群共轭类类数给定的有限群[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43

- (7): 190.
- SHI Jiangtao, ZHANG Cui, SHEN Zhencai. Finite Groups with a Given Number of Conjugacy Classes of Non-nilpotent Maximal Subgroups [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2013, 43(7): 190.
- [8] 卢家宽, 陈婵婵, 王申洋. 非幂零极大子群个数的 2 个下界[J]. *云南民族大学学报(自然科学版)*, 2020, 29(5): 447.
- LU Jiakuan, CHEN Chanchan, WANG Shenyang. Two Lower Bounds on the Number of Non-nilpotent Maximal Subgroups in a Finite Group [J]. *Journal of Yunnan Minzu University (Natural Sciences Edition)*, 2020, 29(5): 447.
- [9] 史江涛, 张翠, 郭松涛. 关于 Shlyk 定理的一个注记 [J]. *广西师范大学学报(自然科学版)*, 2012, 30(1): 22.
- SHI Jiangtao, ZHANG Cui, GUO Songtao. A Note on Theorem of Shlyk [J]. *Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition)*, 2012, 30(1): 22.
- [10] LU Jiakuan, PANG Linna, ZHONG Xianggui. Finite Groups with Non-nilpotent Maximal Subgroups [J]. *Monatshefte Für Mathematik*, 2013, 171: 425.
- [11] 史江涛. 关于非幂零极大子群皆正规的有限群的一个注记[J]. *云南民族大学学报(自然科学版)*, 2017, 26(4): 290.
- SHI Jiangtao. A Note on a Finite Group in Which All Non-nilpotent Maximal Subgroups are Normal [J]. *Journal of Yunnan Minzu University (Natural Sciences Edition)*, 2017, 26(4): 290.
- [12] LI Na, SHI Jiangtao. A Note on a Finite Group with All Non-nilpotent Maximal Subgroups Being Normal [J]. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2019, 42: 700.
- [13] SHI Jiangtao. A Finite Group in Which All Non-nilpotent Maximal Subgroups are Normal has a Sylow Tower [J]. *Hokkaido Mathematical Journal*, 2019, 48(2): 309.
- [14] 史江涛, 任惠瑄. 关于非幂零极大子群皆正规的有限群具有 Sylow 塔的注记 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2021, 56(8): 58.
- SHI Jiangtao, REN Huixuan. A Note on a Finite Group in Which All Non-nilpotent Maximal Subgroups are Normal has a Sylow Tower [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2021, 56(8): 58.
- [15] ZHANG Cui. A Note on Finite Groups with the Indices of Some Maximal Subgroups Being primes [J]. *International Journal of Group Theory*, 2017, 6(2): 17.
- [16] 史江涛, 张翠. 关于极大子群指数的一个注记 II [J]. *烟台大学学报(自然科学与工程版)*, 2016, 29(4): 235.
- SHI Jiangtao, ZHANG Cui. A Note on Indices of Maximal Subgroups II [J]. *Journal of Yantai University (Natural Science and Engineering Edition)*, 2016, 29(4): 235.
- [17] SHI Jiangtao. Sylow Towers in Groups Where the Index of Every Non-nilpotent Maximal Subgroup is Prime [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2018, 17(7): 1850119.
- [18] YI Xiaolan, JIANG Shiyang, KAMORNIKOV S. F.. Finite Groups with Given Non-nilpotent Maximal Subgroups of Prime Index [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2019, 18(5): 1950087.
- [19] ROSE J. S.. On Finite Insoluble Groups with Nilpotent Maximal Subgroups [J]. *Journal of Algebra*, 1977, 48: 182.
- [20] HUPPERT B.. *Endliche Gruppen I* [M]. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1967.
- [21] SHI Jiangtao, SHI Wujie, ZHANG Cui. A Note on p -nilpotence and Solvability of Finite Groups [J]. *Journal of Algebra*, 2009, 321: 1555.

(编辑:温泽宇)